



تحلیل و مقایسه تسلیم و توزیع تنش در سازه‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخل و خارج با در نظر گرفتن تاثیر ضخامت

عباس لقمان^۱، حسین اشرفی^۲، علی زمانی نیا^۳، محسن خلدی^{۴*}

۱- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان

۲- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان

۳- کارشناس مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان

*Mohsen.Kholdi2548@gmail.com

ارسال: بهمن ماه ۹۵ پذیرش: تیر ماه ۹۶

چکیده

طراحی و ساخت مخازن تحت فشار در صنایع هوایی و دفاعی، همواره نیازمند تحقیق و تحلیل در مورد پارامترهای مختلف آن به منظور بهبود عملکرد و در نتیجه کاهش هزینه‌های صرف شده می‌باشد. اما در این میان مخازنی که تحت فشار خارجی قرار دارند کمتر مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. در این تحقیق به بررسی تاثیر ضخامت سازه‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با دوانتهای بسته، بر توزیع تنش در راستاهای شعاعی و محیطی پرداخته می‌شود. همچنین تاثیر این پارامتر بر تنش تسلیم و حداقل فشار داخلی و خارجی لازم برای تسلیم جداره‌های داخلی و خارجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این تاثیرات برای نسبت‌های شعاع خارجی به شعاع داخلی مختلف و به صورت تحلیلی ارائه شده‌اند. برای بررسی تسلیم از معیار شکست فون مایز (Von Mises) و برای بررسی توزیع تنش، روش حل لامه (Lame) به کار گرفته شده است. ماده‌ی در نظر گرفته شده برای این پژوهش فولاد ضد زنگ SUS 304 می‌باشد و با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل در ناحیه پس از تسلیم مورد تحلیل قرار گرفته‌است. به منظور جامعیت بخشیدن به پژوهش سعی بر آن شده است تا حد امکان، نتایج به صورت بدون بعد ارائه گردند. نتایج حاصل از این تحقیق تصویر مناسبی از چگونگی توزیع تنش و تأثیرات آن بر تسلیم استوانه در اختیار قرار می‌دهند.

کلمات کلیدی: استوانه جدار ضخیم، توزیع تنش، تنش شعاعی، تنش محیطی، تسلیم.

۱. مقدمه

طراحی استوانه و کره جدار ضخیم به عنوان اصلی‌ترین هندسه‌های مورد استفاده در مخازن تحت فشار در بین مهندسی و دانشمندان علم مکانیک از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. این سازه‌ها به دلیل داشتن تقارن هندسی و همچنین نداشتن زاویه و محل تمرکز تنش، در فشارهای بالا از مقاومت بسیار خوبی در مقایسه با سایر اشکال هندسی برخوردارند. لذا تحلیل این گونه سازه‌ها بسیار مورد توجه قرار دارند و از جهات مختلفی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در گذشته تحقیقات بسیار

گسترده‌ای بر روی این موضوع انجام شده است، لیکن غالب تحلیل‌های انجام شده در این زمینه مربوط به مخازن تحت فشار داخلی است و قیاسی جهت بررسی تفاوت‌های مخازن تحت فشار داخلی و مخازن تحت فشار خارجی انجام نگرفته است. هاوکیارد و جانسون [۱] به بررسی تغییرات قطر و تاثیر ضخامت بر این تغییرات در یک استوانه جدارضخیم کوتاه تحت بارگذاری محوری پرداختند. گانگک لینگک و همکاران [۲] به تحلیل استوانه جدار ضخیم با انتهای باز و با فرض ماده پلاستیک ایده‌آل با استفاده از شرایط دوازده ضلعی تسلیم اقدام نمودند و در نهایت به ارائه دو فرمول انتگرالی برای تحلیل این موضوع پرداختند و نشان دادند که این فرمول‌ها تطابق قابل قبولی با نتایج تجربی دارند. گائو ژین-لین [۳] به ارائه یک حل تحلیلی برای تنش و کرنش و جابه‌جایی المان‌های یک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی از جنس مواد کرنش سخت که دو انتهای آن باز باشد پرداخت. او با استفاده از تئوری تغییر شکل هنکی و تئوری شکست فون مایزرز و بر اساس قانون توزیع توانی الاستیک-پلاستیک و روش اصلاح شده متغیر کمکی نادیا به یک حل کاملاً تحلیلی دست یافت که بر خلاف کارهای پیش از آن از جامعیت بالایی برخوردار بود. لقمان و وهاب [۴] به تحلیل بارگذاری و بار برداری در محدوده الاستیک-پلاستیک یک استوانه جدار ضخیم با دو انتهای بسته از جنس ماده کرنش سخت SUS 304 با فرض ایزوتروپ و همگن بودن ماده پرداختند. بارگذاری مسئله مورد تحلیل آنها ترکیبی از فشار داخلی و گرادیان دما بود و با این فرض به تحلیل پرداختند که بار برداری با رفتار الاستیک انجام می‌پذیرد و از اثر باوشینگر چشم‌پوشی نمودند. آنها با این فرضیات به محاسبه تنش پسماند پس از بار برداری از مقادیر ۲۵ و ۵۰ درصد فراکرنش پرداختند. رز [۵] در مقاله‌ای به تحلیل کماتش مخازن تحت فشار خارجی، و مقایسه آن با نتایج تجربی پرداخت، این تحلیل اگرچه فقط در مورد کماتش این گونه مخازن بحث می‌کند اما یکی از معدود مقالات علمی است که در مورد فشار خارجی بر روی مخازن بحث می‌نماید. قناد و صابری نسب اسکورتسوف و همکاران [۶] یک روش جدید اتوفرتاژ برای استوانه‌های جدار ضخیم به وسیله فشار پلاستیک تسلیم توسعه دادند. سهمانی [۷] در پژوهشی به بررسی و محاسبه تنش در مخزن جدار ضخیم آیزوتروپیک که فشار در سطح داخلی آن به صورت سیکلی تغییر می‌کند، پرداخت. او بارگذاری را به صورت تابعی سینوسی در نظر گرفت و تنش را در نقاط مختلف ضخامت محاسبه نمود. همچنین صابری نسب و قناد [۸] در تحقیقی با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی PET روابط مربوط به تنشهای شعاعی محیطی و محوری در استوانه جدارضخیم تحت فشار داخلی و خارجی درحالت الاستیک خطی و در شرایط کرنش صفحه‌ای استوانه با دوسر بسته و مقید را محاسبه و سپس با بررسی روابط حاصل تنش‌های ماکزیمم و می‌نیمم را مشخص نمودند. پس از آن با کمک معیار تسلیم ترسکا فشار بحرانی برای شروع تسلیم در استوانه محاسبه و در ادامه با فرض ماده الاستیک - پلاستیک کامل برای استوانه روابط مربوط به تنش‌های شعاعی محیطی و محوری و همچنین جابجایی شعاعی در محدوده الاستیک و پلاستیک استوانه الاستوپلاستیک را به دست آوردند.

۲. معادلات و روابط حاکم

برای تحلیل تنش در مخازن جدارضخیم، شرایط تعادل، در هنگامی که مخزن، کاملاً تحت فشار است مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تحلیل استوانه، از مختصات استوانه‌ای، بهره‌گیری می‌شود. تنش‌های طولی σ_z در استوانه بستگی به شرایط انتهایی استوانه دارند. با توجه به این که در این تحقیق، انتهای استوانه به صورت بسته در نظر گرفته شده است معادلات حاکم بر

یک استوانه جدارضخیم تحت فشارهای داخلی و خارجی p_1 و p_2 با دو انتهای بسته کروی در نقاطی که به اندازه کافی از انتهای استوانه دور هستند در ادامه آورده می‌شوند.

معادله تعادل برای استوانه جدارضخیم در مختصات استوانه ای عبارت است از:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (1)$$

که در آن σ_r و σ_θ به ترتیب تنش‌های شعاعی و محیطی می‌باشند و r شعاعی دلخواه از ضخامت استوانه است. معادلات سازگاری (کرنش-جابجایی) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $u = u(r, z)$ و $w = w(r, z)$ به ترتیب، جابه‌جایی در راستاهای شعاعی و محوری می‌باشند و ε_r ، ε_θ و ε_z به ترتیب، کرنش در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری هستند. در نقاطی که به اندازه کافی از انتهای استوانه دور هستند وابستگی u و w به z بسیار کم می‌شود و به دلیل وجود تقارن، کرنش‌های برشی برابر صفر می‌باشند. با حذف u از دو معادله اول رابطه‌ی (۲)، بدست خواهد آمد.

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \varepsilon_r - \varepsilon_\theta \quad (3)$$

معادلات تنش-کرنش عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \end{aligned} \quad (4)$$

که در رابطه (۴)، E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسن ماده متشکله سازه و σ_z تنش در راستای محوری هستند. با استفاده از معادلات (۱)، (۳) و (۴) و حل معادلات دیفرانسیل به دست آمده، روابط زیر برای استوانه‌ای با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حاصل می‌گردند:

$$\sigma_r = c_1 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{c_2}{r^2} \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = c_1 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{c_2}{r^2} \quad (6)$$

که C_1 و C_2 مقادیر ثابتی هستند که با اعمال شرایط مرزی مسئله محاسبه می‌گردند. با توجه به تعادل نیروها در راستای محوری معادله تنش در این راستا بدین صورت می‌باشد:

$$\int_a^b \sigma_z \times 2\pi r dr = F + \pi * (p_1 a^2 - p_2 b^2) \quad (7)$$

که در معادله فوق، پارامتر F نیروی خارجی اعمال شده به انتهای استوانه می باشد. شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$\begin{aligned} @ r = a &\rightarrow \sigma_r = -p_1 \\ @ r = b &\rightarrow \sigma_r = -p_2 \end{aligned} \quad (8)$$

با قرار دادن شرایط مرزی فوق، در معادلات بدست آمده و همچنین ترکیب معادلات تعادل و تنش- کرنش، روابط مربوط به تنش در راستای r ، θ و z برای استوانه جدارضخیم با دو انتهای بسته به شرح زیر محاسبه می گردند:

$$\sigma_r = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} (p_1 - p_2) \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} (p_1 - p_2) \quad (10)$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{F}{\pi (b^2 - a^2)} \quad (11)$$

که روابط (۹) تا (۱۱) به روابط لامه موسوم می باشند. با بی بعدسازی روابط ۹ تا ۱۱ روابط زیر حاصل می گردند:

$$\sigma'_r = \frac{p_1 - p_2 \beta^2}{\beta^2 - 1} - \frac{\beta^2}{\rho^2 (\beta^2 - 1)} (p_1 - p_2) \quad (12)$$

$$\sigma'_\theta = \frac{p_1 - p_2 \beta^2}{\beta^2 - 1} + \frac{\beta^2}{\rho^2 (\beta^2 - 1)} (p_1 - p_2) \quad (13)$$

$$\sigma'_z = \frac{p_1 - p_2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \quad (14)$$

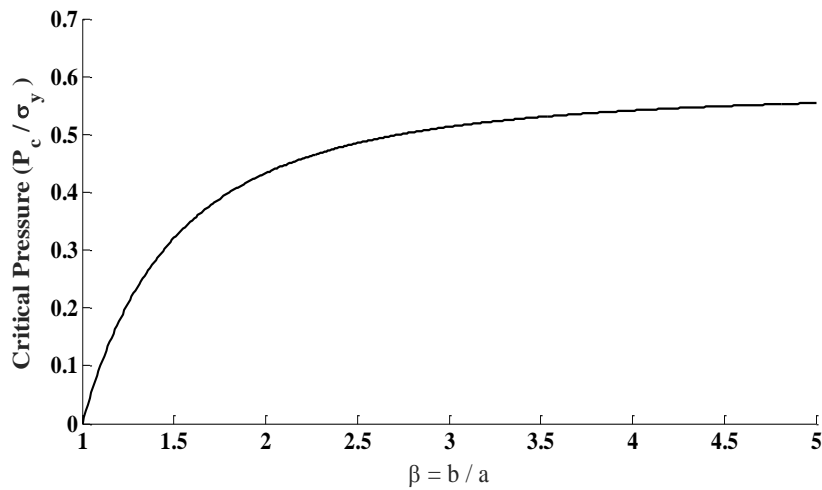
که در این روابط $\rho = r/a$ ، $\beta = b/a$ ، همچنین σ'_r ، σ'_θ و σ'_z به ترتیب از تقسیم تنش در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری بر تنش تسلیم به دست می آیند. با قرار دادن این روابط در تئوری تسلیم فون مایزر رابطه (۱۵) حاصل می گردد:

$$\sigma_y = \sqrt{3} \left| \frac{\beta^2}{\rho^2 (\beta^2 - 1)} (p_1 - p_2) \right| \quad (15)$$

که در این رابطه، σ_y نمایانگر تنش تسلیم و ρ نسبت شعاع مورد نظر به شعاع داخلی است. با توجه به رابطه (۱۵) مشخص می - گردد فشار داخلی و خارجی مورد نیاز برای شروع تسلیم یکسان می باشند.

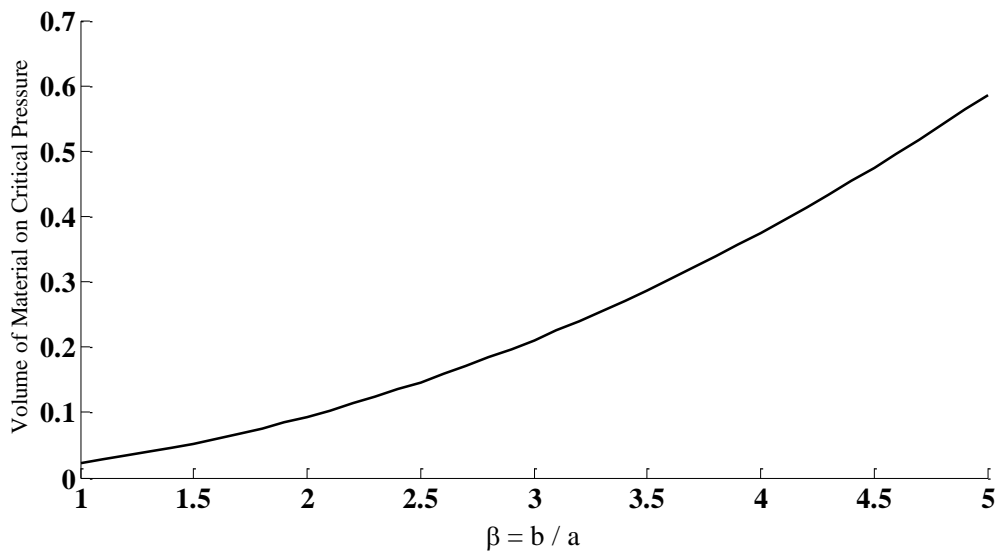
۳. ارائه نتایج تحقیق

شکل ۱ نشان دهنده فشار لازم برای شروع تسلیم در استوانه جدارضخیم با دو انتهای بسته می باشد که فقط تحت فشار داخلی یا فقط تحت فشار خارجی قرار گرفته است:



شکل ۱- نمودار فشار مورد نیاز برای تسلیم در ضخامت های مختلف

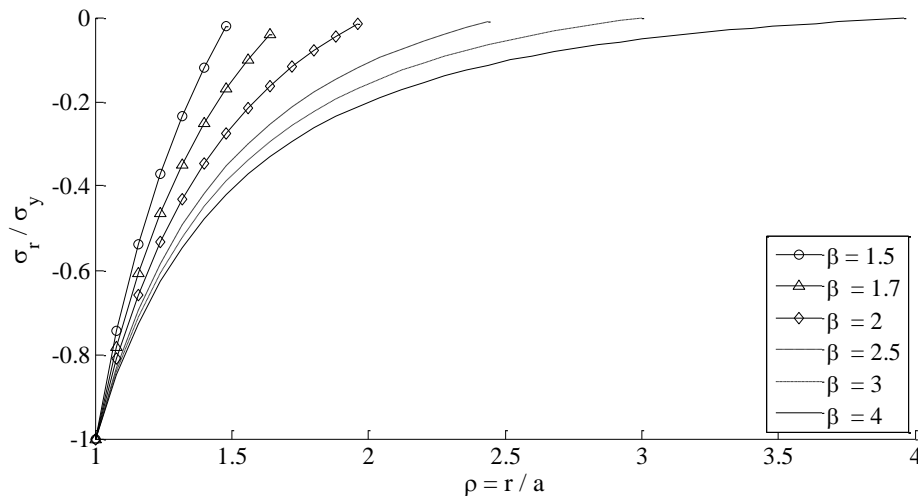
این نمودار نشان می دهد مقدار فشار مورد نیاز برای تسلیم در ضخامت های بیش از نسبت شعاع ۲/۵ تغییرات کمتری نسبت ضخامت های کمتر از این نسبت دارد. در شکل ۲ می توان تغییرات حجم مورد نیاز ماده نسبت به فشار تسلیم را بررسی نمود:



شکل ۲- نسبت حجم ماده مورد نیاز به فشار بحرانی برای ضخامت های مختلف

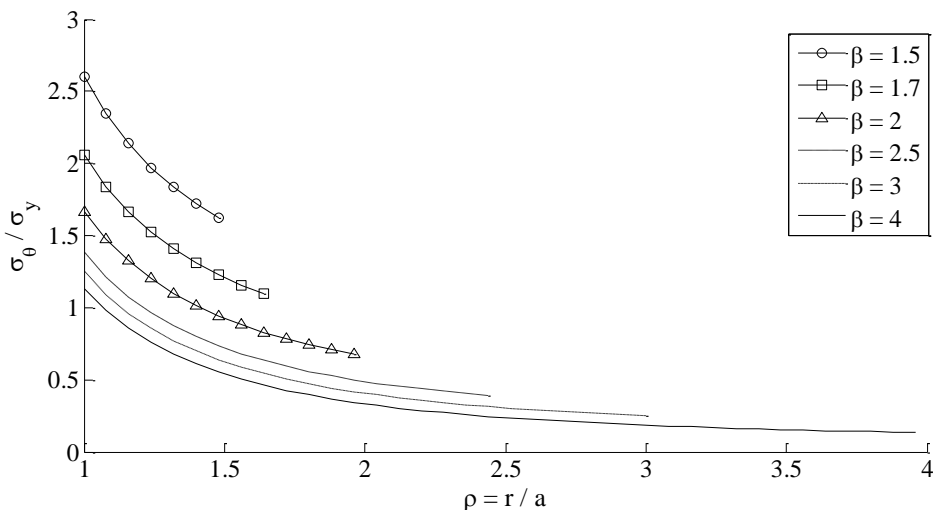
شکل ۲ نشان دهنده آن است که با افزایش ضخامت، نسبت ماده مصرف شده جهت ساخت استوانه به فشار آستانه تسلیم آن افزایش می یابد و نکته بیان گر آن است که افزایش بی رویه ضخامت استوانه با هدف افزایش فشار تسلیم، چندان دارای صرفه اقتصادی نیست.

همان گونه که در شکل ۳ مشاهده می شود در استوانه تحت فشار داخلی در لحظه شروع تسلیم، تنش های شعاعی از فشار بحرانی در جداره داخلی شروع شده و به صفر در جداره خارجی می رسند.



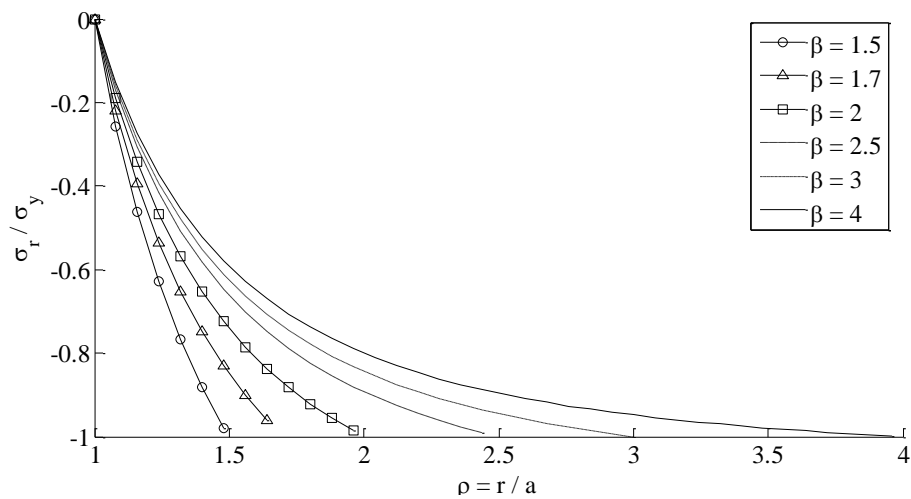
شکل ۳- نمودار تاثیر ضخامت بر توزیع تنش شعاعی در استوانه تحت فشار داخلی

با مقایسه شکل های ۳ و ۴ مشخص می گردد که اختلاف فشار در جداره ی داخلی استوانه بیشترین مقدار خود را داراست. بنابراین با توجه به معیار تسلیم فونمایزرز، که بر مبنای اختلاف تنش در راستاهای مختلف استوار است، تسلیم از جداره ی داخلی استوانه شروع خواهد شد.

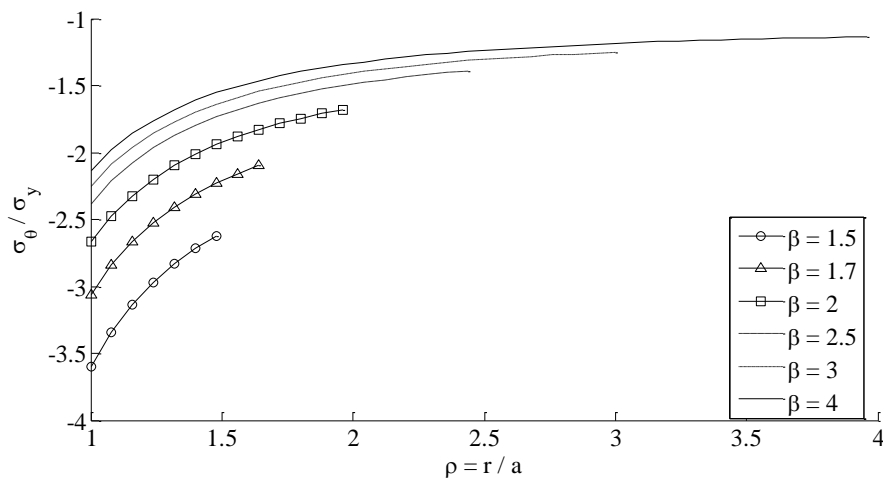


شکل ۴- نمودار تاثیر ضخامت بر توزیع تنش محیطی در استوانه تحت فشار داخلی

با اعمال فشار از دیواره خارجی استوانه توزیع تنش ها در دیواره دچار تغییراتی می گردد. تحت این شرایط، توزیع تنش های شعاعی و محیطی، به صورت شکل های ۵ و ۶ در می آیند.



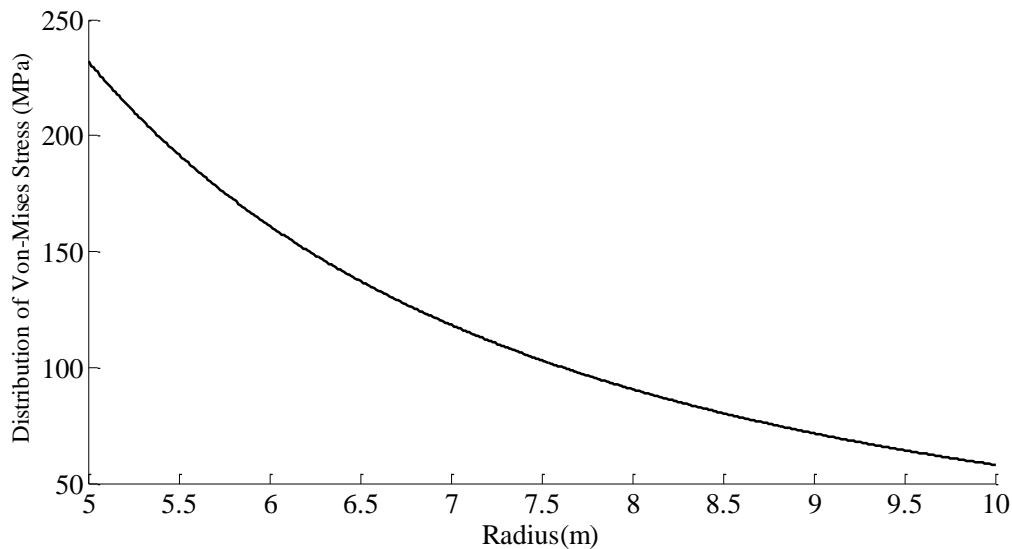
شکل ۵- نمودار تاثیر ضخامت بر توزیع تنش شعاعی در استوانه تحت فشار خارجی



شکل ۶- نمودار تاثیر ضخامت بر توزیع تنش محیطی در استوانه تحت فشار خارجی

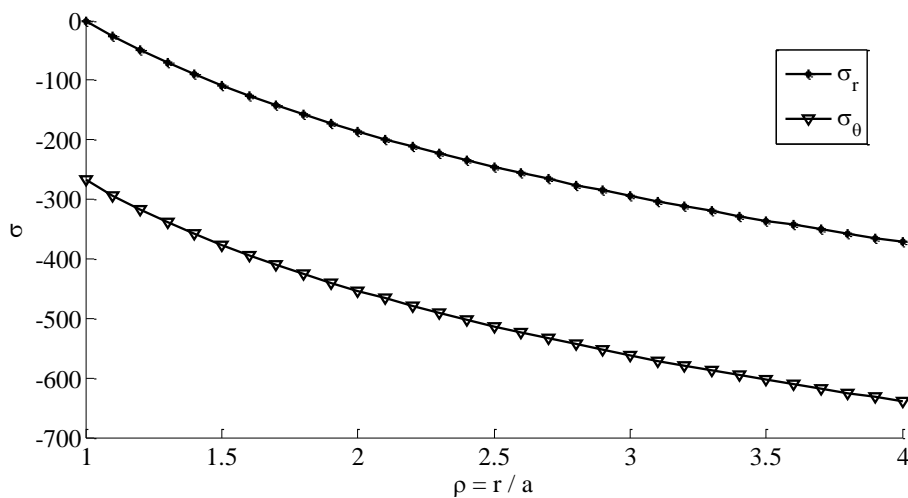
نمودارهای شکل‌های ۳ تا ۶ نشان می‌دهند که با افزایش ضخامت دیواره، شیب تغییرات تنش شعاعی کاهش می‌یابد لیکن شیب تغییرات تنش محیطی تقریباً مستقل از ضخامت است.

اما با بررسی اعداد در این نمودارها می‌توان به این نکته پی برد که توزیع تنش در استوانه‌ی تحت فشار داخلی به گونه‌ای است که در راستای شعاعی دارای مقادیر مثبت و در راستای محیطی دارای مقادیر منفی است. اما در استوانه‌ی تحت فشار خارجی، هم تنش شعاعی و هم تنش محیطی هر دو دارای مقادیر منفی هستند. لیکن نکته قابل توجه آن است که در هر دو این شرایط تنش فون‌مایز برابر است و لذا برای شروع تسلیم، چه تحت فشار خارجی و چه تحت فشار داخلی به یک بارگذاری برابر، نیاز است. لذا تنش معادلی که از تئوری فون‌مایز به دست می‌آید برای هر دو حالت یکسان می‌باشد. در شکل ۷ مقدار تنش فون‌مایز در نقاط مختلف دیواره‌ی استوانه با شعاع داخلی ۵ متر و شعاع خارجی ۱۰ متر ($\beta = 2$) ساخته شده از جنس فولاد ضد زنگ SUS 304 نشان داده شده است.



شکل ۷- توزیع تنش فون مایز در دیواره استوانه

در شکل ۷ همانگونه که مشاهده می شود، تنش معادل، در دیواره داخلی استوانه دارای بیشترین مقدار خود است، که این مطلب تایید کننده پیش بینی شروع تسلیم از دیواره داخلی است. اما بر خلاف ناحیه الاستیک، که تنش های شعاعی و محیطی در جهت خلاف یکدیگر توزیع می گردند، در ناحیه پلاستیک این روند، متفاوت است. شکل ۸ نشان دهنده توزیع تنش های شعاعی و محیطی در دیواره استوانه است. با فرض اینکه ماده سازنده SUS 304 بوده و رفتار الاستیک-پلاستیک کامل از خود نشان دهد. همان گونه که از این شکل نمایان است برخلاف ناحیه الاستیک، در ناحیه پلاستیک، تنش های محیطی و شعاعی موازی یکدیگر هستند، لذا تنش فون مایز در این ناحیه مقدار ثابتی است. که این خاصیت ناشی از رفتار الاستیک-پلاستیک کامل می باشد. چرا که در ماده الاستیک-پلاستیک کامل، در ناحیه پلاستیک، تنش فون مایز هیچگاه از تنش تسلیم فراتر نمی رود.



شکل ۸- توزیع تنش های پلاستیک شعاعی و محیطی در استوانه جدار ضخیم

۴. نتیجه گیری

با بررسی‌های انجام شده در این مقاله می‌توان نتایج ذکر شده در زیر را استنباط نمود:

- با افزایش ضخامت استوانه، شدت افزایش فشار تسلیم آن رو به کاهش می‌گذارد به طوری که ساخت استوانه‌های با ضخامت بسیار زیاد جهت افزایش فشار تسلیم، باعث افزایش بی‌رویه ماده مصرف شده و در نتیجه هزینه ساخت خواهد شد.
- در استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی، تنش‌های محیطی و شعاعی از نظر کششی یا فشاری بودن جهت یکسانی ندارند. این درحالی است که اگر فشار اعمال شده بر سازه، از سمت خارج از آن باشد این تنش‌ها هم‌راستا خواهند بود. در استوانه‌ی جدار ضخیم، محل شروع تسلیم، مستقل از شرایط مرزی می‌باشد، بدین معنی که صرف‌نظر از این که فشار اعمالی از داخل باشد یا خارج، تسلیم همواره از دیواره‌ی داخلی شروع خواهد شد.
- در صورتی که ماده سازنده استوانه، دارای رفتار الاستیک-پلاستیک کامل باشد، تنش‌های محیطی و شعاعی در ناحیه پلاستیک به صورت موازی با یک‌دیگر خواهند بود که این رفتار سبب می‌گردد در این ناحیه تنش فون‌مایز از تنش تسلیم بیشتر نگردد و همواره مقدار ثابتی داشته‌باشد.

۵. مراجع

1. Hawkyard, J. B., & Johnson, W. (1967). An analysis of the changes in geometry of a short hollow cylinder during axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 9(4), 163-182.
2. Li, G., Zeng, X., Li, J., & Huang, L. (1988). Elastoplastic analysis of an open-ended cylinder from the twelve polygonal yield condition. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 33(2), 143-152.
3. Gao. Xin-lin. " Gao, X. L. (1992). An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material. *International journal of pressure vessels and piping*, 52(1), 129-144.
4. Loghman, A., & Wahab, M. A. (1994). Loading and unloading of thick-walled cylindrical pressure vessels of strain-hardening material. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF PRESSURE VESSEL TECHNOLOGY*, 116, 105-105.
5. Ross, C. T. F., & Humphries, M. (1993). The buckling of corrugated circular cylinders under uniform external pressure. *Thin-walled structures*, 17(4), 259-271.
6. Skvortsov, V. F., Boznak, A. O., Kim, A. B., Arlyapov, A. Y., & Dmitriev, A. I. (2016). Reduction of the residual stresses in cold expanded thick-walled cylinders by plastic compression. *Defence Technology*, 12(6), 473-479.
۷. سهمانی، س. (۱۳۸۷). توزیع تنش در مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم آیزوتروپیک تحت تغییرات سیکلی فشار داخلی، ششمین کنفرانس سالانه دانشجویی مهندسی مکانیک، تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.
۸. صابری نسب، الف. و قناد، م. (۱۳۹۱). تحلیل الاستوپلاستیک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی، چهاردهمین کنگره ملی مهندسی شیمی ایران، تهران، دانشگاه شریف.