



## مکانیک شکست بر اساس فلسفه تغییر حالت

عبدالرسول رنجبران<sup>۱\*</sup>، محمد رنجبران<sup>۲</sup>، فاطمه رنجبران<sup>۳</sup>

۱- دانشیار مهندسی عمران، دانشگاه شیراز

۲- دکترای مهندسی شیمی، از دانشگاه شریف

۳- دانشجوی کارشناسی مکانیک، دانشگاه شیراز

\* ranjbarn@shirazu.ac.ir

ارسال: دی ماه ۹۷ پذیرش: بهمن ماه ۹۷

### چکیده

در فلسفه تغییر حالت (فتح)، همه پدیده‌های طبیعی تغییر از حالت مینا به حالت هدف هستند. به کمک منطق ریاضی، استدلال منطقی، و مطالعه طولانی در پدیده‌ها، مبانی فتح به صورت توابع حالت و پدیده شکل گرفته است. این‌ها توابعی صریح، دقیق، و ساده از متغیر حالت و دو ضریب کاربری می‌باشند که برای هر پدیده با استفاده از داده‌های موجود تنظیم می‌گردند. هدف این مقاله تعیین عوامل اصلی مکانیک شکست بر اساس فتح می‌باشد. در مکانیک شکست سازه سالم مینا، ظرفیت سازه ترک دار هدف، و اندازه ترک متغیر حالت است. داده‌های موجود در فرهنگ علمی برای تعیین و تنظیم ضرایب مورد استفاده قرار گرفته و همه مباحث مکانیک شکست به صورت بسیار ساده و دقیق ارائه شده است. برای تایید کار نتایج فتح با نتایج دیگران مقایسه شده و نتیجه بسیار موفقیت آمیز بوده است. برای اولین بار در تاریخ علم مکانیک شکست به صورت معادلاتی بسیار ساده، فوق العاده دقیق، و بدون تکیه‌ی ارائه شده است. همه نامرادی‌هایی که در صد سال گذشته در مکانیک شکست بوده و هست، در سایه فتح دیگر نخواهد بود.

کلمات کلیدی: مکانیک شکست، ترک، فتح، تغییر حالت، تکیه‌ی.

### ۱- مقدمه

مکانیک شکست یکی از مباحث مهم در مهندسی سازه، مهندسی مکانیک، مهندسی هوا فضا، و تعداد بیشمار دیگری از شاخه‌های علوم و مهندسی است. آغاز مبحث مکانیک شکست سنتی به کار انجلیس [۱]، که تنش‌های اطراف یک سوراخ بیضی شکل در صفحه را تحلیل کرده، کلید خورده است. تلاش شاخص بعدی به معرفی انرژی آزاد شده توسط گریفیس [۲]، افسر نیروی دریایی انگلیس، بر می‌گردد. به دنبال آن‌ها و ستر گعارد [۳] تئوری الاستیسیته را برای بررسی توزیع تنش در اطراف نوک ترک به کار گرفت و به معادلاتی که تکیه‌ی در نوک ترک را نشان می‌دادند دست یافت. بیست سال بعد ابروین [۴] از معادلات و ستر گعارد برای معرفی کمیت عامل شدت تنش، که بعد کمیت کلیدی مکانیک شکست شد، استفاده کرد. به دنبال این محققان پیشرو، مبحث مکانیک شکست مورد توجه زیاد قرار گرفت [۵-۹]. علی‌الرغم پیشرفت‌های زیاد، مکانیک شکست هنوز به پختگی کامل

نرسیده و محققین در این مبحث بسیار فعالند [۱۱ و ۱۰]. یکی از عوامل عمده موثر در مشکلات موجود این مبحث را شاید بتوان موضوع تکنیکی دانست که بنیان مکانیک شکست سنتی بر آن بنا شده است، ولی همخوانی با رفتار واقعی مصالح ندارد. بر اساس فرض وجود تکنیکی، تحت کمترین نیرو، تنش نوک ترک بینهایت می شود. یعنی این که هیچ سازه ترکدار تحت نیرویی نمی تواند موجود باشد. در حالی که چنین نیست [۱۲]. بر خلاف تلاش های زیاد، مبحث مکانیک شکست هنوز نقاط ابهام زیاد دارد. طی دو دهه اخیر رنجبران و همکاران پژوهشی شان [۱۳-۱۸] تحقیقات گسترده ای را در زمینه مرتبط با مکانیک شکست انجام دادند که منجر به معرفی فلسفه تغییر حالت (فتح) شد. در فتح هر پدیده ای به صورت حرکت از حالت ابتدا (مبداء) به حالت انتها (مقصد) تبدیل می شود. ارتباط بین این دو حالت، توسط توابعی که حاصل مطالعات گسترده محققان واضح فتح است، برقرار می گردد. ساخت فتح بر اساس پدیده های طبیعی است، لذا نسبت به فلسفه موجود پشتیبان علم مرسوم دارای کمترین فرض مشکوک است. در بررسی سازه های معیوب (ترک دار) یک معادله دیفرانسیل تولید شد که برای حل آن، همانند سازه سالم، تنها نیاز به شرایط مرزی بود [۱۳]. موفقیت این معادله محققین را بر آن داشت تا در تبدیل آن به معادله عناصر محدود [۱۷ و ۱۸] اقدام کنند. مساله با موفقیت همراه نشد، زیرا که روش های مناسب در فرهنگ علمی برای این کار موجود نبودند (روش های موجود کار آ نبودند). ابتدا به صورت آزمایش و خطایی و با محاسبات عددی زیاد [۱۷] و برای تیر هایی با طول های متفاوت و میزان خرابی مختلف ضرایب اصلاحی بدست آمدند. با مطالعه دقیق، این ضرایب به صورت توابعی (پدیده) تعریف شدند. توابع پدیده تولد فتح را کلید زدند. بعد ها این توابع با استفاده از منطق ریاضی نیز گسترش یافتند. مثلا ضریب اصلاحی برای تیری با طول و نرمی خرابی به صورت زیر به تابع پایا تبدیل شد.

$$S_R = 0.11111 = 2/18 = 0.5/(0.5+4) = L/(L+4c_s) = f_s/(f_s + c_s) \quad (1)$$

که در آن  $f_s$  نرمی سازه است. به دنبال تولد این تابع و قل دیگر آن یعنی تابع تخریب  $F_R$ ، دو تابع حالت  $O_s$  &  $D_s$  هم تعریف و گسترش یافتند. این توابع امکان بررسی دقیق و ساده پدیده ها را با شیوه جدید، فتح، فراهم ساختند. هدف از این مقاله گسترش، و صحت سنجی کمیت های اصلی مکانیک شکست بر اساس فتح می باشد. این کار با مقدمه و معرفی فتح در بخش یک آغاز شده است. در بخش دو توابع پدیده گسترش و تولد توابع حالت کلید خورده اند. توابع حالت در بخش سوم به صورت توابع ریاضی بر اساس میزان خرابی گسترش داده شدند. بخش چهارم حاوی گسترش دقیق و ساده عوامل مهم مکانیک شکست است. صحت سنجی به صورت مقایسه نتایج با کار دیگران در بخش پنج و نتایج حاصل از تحقیق در بخش شش گنجانده شده است. فهرست منابع مورد استفاده در انتهای مقاله آمده است.

## ۲- توابع پدیده

نرمی یک سازه معیوب  $f_{DS}$  بر حسب نرمی سازه سالم  $f_s$  و نرمی عیب  $c_s$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_{DS} = f_s + c_s \quad (2)$$

به همین ترتیب سختی سازه معیوب  $k_{DS}$  بر حسب سختی سازه سالم و سختی عیب در معادله (۳) تعریف شده است.

$$k_{DS} = k_s - k_D \quad (3)$$

واحد بودن حاصل ضرب نرمی و سختی سازه معیوب در معادله (۴) نشان داده می شود.

$$(k_s - k_D)(f_s + c_s) = 1 \quad (4)$$

در این مرحله نرمی و سختی سازه و نرمی عیب معلوم و سختی عیب (برابر کاهش در سختی سازه) مجهول فرض شده و در نتیجه از حل معادله (۴) سختی عیب و سختی سازه معیوب به صورت زیر به دست می آیند.

$$k_{DS} = S_R k_S \quad k_D = F_R k_S \quad (5)$$

که در آن توابع تخریب و پایا به صورت زیر تعریف شده اند.

$$S_R = f_S / (f_S + c_S) \quad F_R = c_S / (f_S + c_S) \quad (6)$$

توجه شود که توابع معرفی شده دقیقاً همان هایی هستند که قبلاً به صورت آزمایش و خطایی تولید شده بودند. با توجه به دامنه بینهایت نرمی سازه  $f_S \in [0 \quad \infty]$  دامنه توابع پدیده و نرمی عیب به صورت زیر حاصل می شود.

$$S_R \in [0 \quad 1] \quad F_R \in [0 \quad 1] \quad c_S \in [0 \quad \infty] \quad (7)$$

به منظور آماده سازی برای گسترش بعدی برای مقدار نرمی سازه یک  $f_S = 1$  تابع پایا تابع مبدا  $O_S$ ، تابع تخریب تابع مقصد  $D_S$ ، و نرمی عیب کسر حالت  $R_S$  نامگذاری می شوند. توابع جدید، توابع حالت نامیده شده اند. توابع حالت بر حسب کسر حالت در معادله (۸) تعریف می گردند.

$$O_S = 1 / (1 + R_S) \quad D_S = R_S / (1 + R_S) \quad R_S = D_S / O_S \quad (8)$$

دامنه توابع مبدا، مقصد، و کسر حالت به ترتیب برابر دامنه توابع پایا، تخریب، و نرمی عیب در معادله (۷) هستند.

### ۳- توابع حالت

متغیر حالت  $\xi \in [0 \quad 1]$  طوری تعریف شده که مقدار صفر آن برای سازه سالم و مقدار یک آن برای سازه خراب است. با توجه به دامنه تابع هدف، شرط انتهایی این تابع بر حسب متغیر حالت به صورت زیر تعریف می شود.

$$O_S(\xi) = \begin{cases} \max = 1 & @ \xi = 0 \\ \min = 0 & @ \xi = 1 \end{cases} \quad (9)$$

که در آن علامت بیشینه max و علامت کمینه min تابع است. تابع مثلثاتی مناسب با شرایط فوق در معادله (۱۰) تعریف می شود.

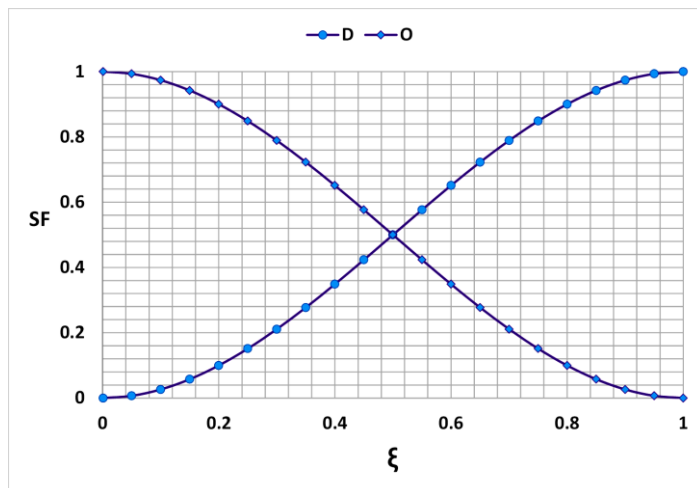
$$O_S(\xi) = (1 + \cos \pi \xi) / 2 \quad (10)$$

به طریق مشابه برای تابع تخریب تابع مثلثاتی زیر تعریف می گردد.

$$D_S(\xi) = (1 - \cos \pi \xi) / 2 \quad (11)$$

تابع مبدا  $O_S$  و تابع هدف  $DS$  بر حسب متغیر حالت در شکل ۱- نشان داده شده اند. با استفاده از معادله های (۱۰) و (۱۱) کسر حالت به شکل زیر در می آید.

$$R_S(\xi) = (1 - \cos \pi \xi) / (1 + \cos \pi \xi) \quad (12)$$



شکل ۱- توابع حالت

سختی و نرمی سازه و سختی و نرمی عیب به صورت حاصل ضرب مقادیر بعد دار و بی بعد در زیر تعریف می شوند.

$$f_S = f_N F_S \quad k_S = k_N K_S \quad c_S = c_N F_S \quad k_D = c_N K_S \quad (13)$$

با توجه به نسبت قسمت چهارم و دوم معادله (۱۳) و تعریف کسر حالت معادله زیر حاصل می شود.

$$c_N = k_N R_S(\xi) \quad (14)$$

با استفاده از معادله (۱۴) شکل کلی توابع پدیده به شکل زیر در می آید.

$$S_R = O_S / (O_S + k_N^2 D_S) \quad F_R = k_N^2 D_S / (O_S + k_N^2 D_S) \quad (15)$$

#### ۴- عوامل اصلی مکانیک شکست

مهمترین عامل در مکانیک شکست، نرمی ترک است، که به عنوان محصول نهایی مکانیک شکست سنتی به حساب می آید. در آن جا نرمی ترک با انجام عملیات ریاضی بر روی عامل میزان انرژی آزاد شده  $G$ ، به دست می آید. عامل میزان انرژی آزاد شده نیز خود به عامل شدت تنش  $K$  وابسته است. بنا براین در مکانیک شکست سنتی سلسله مراتب محاسبه به ترتیب از عامل شدت تنش آغاز شده و به سراغ محاسبه میزان انرژی آزاد شده می رود و در نهایت نرمی ترک به دست می آید. وابستگی تنگاتنگ عوامل به یک دیگر و سختی و مشکلات موجود در محاسبه عامل شدت تنش، که به هندسه، جنس، و مشخصات دیگری از سازه مورد نظر دارد، باعث شده که کیفیت محاسبات پایین باشد. از طرفی مصنوعی بودن وابستگی ها به مشکلات مکانیک شکست سنتی افزوده است. مطالعات گروه پژوهشی رنجبران نشان داد که اولاً دو عامل انرژی آزاد شده و شدت تنش به هم وابسته، و در حقیقت یکی هستند که به دو صورت بیان شده اند. در ثانی عامل نرمی ترک کاملاً مستقل از آن ها است و وابستگی موجود در مکانیک شکست سنتی مصنوعی است. به دنبال کشف این حقیقت و تولد فتح عوامل مکانیک شکست به طریقی بسیار ساده و دقیق، و به صورت زیر محاسبه می گردد. عامل بدون بعد نرمی ترک  $c_N$ ، با استفاده از معادله (۱۴) قابل محاسبه است. برای این کار کافی است که برای سازه مورد نظر ضریب تعیین گردد. برای عضوهای مرسوم این کار بسیار ساده ای است. مثلاً از روی گسترش معادلات در بخش قبل این ضریب برای میله محوری یک و برای سازه خمشی چهار است. بر این مبنا نرمی ترک در میله محوری و در تیر به صورت زیر در می آیند.

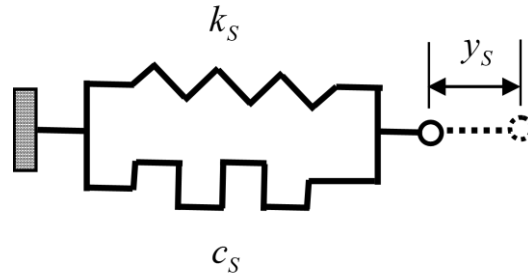
$$c_a = R_S(\xi) \quad c_b = 4R_S(\xi) \quad (16)$$

متغیر حالت هم که در این جا عمق نسبی ترک است که برحسب نسبت سطح ترک و سطح مقطع عضو در معادله (۱۷) محاسبه شده است.

$$\xi = A_c / A \quad (17)$$

دیده می شود که واقعا معادله (۱۴) جانشین مناسب برای تمام مکانیک شکست سنتی است. در بخش بعد به صورت مقایسه با نتایج دیگران صحت سنجی بیشتر به عمل می آید.

در گسترش روابط لازم برای محاسبه انرژی آزاد شده به صورت زیر عمل شده است. انرژی موجود در واحد حجم حاوی ترک  $E_A$  و انرژی آزاد شده در اثر ایجاد ترک  $E_R$  به صورت زیر بر حسب سختی  $k_S$  و جابجایی  $y_S$ ، با مراجعه به شکل-۲، در معادله (۱۸) محاسبه شده است.



شکل ۲- مدل فنری سازه ترک دار

$$E_A = 0.5k_S y_S^2 \quad E_R = 0.5c_S y_S^2 \quad (18)$$

با محاسبه نسبت انرژی آزاد شده به انرژی موجود با توجه به معادله (۱۴) رابطه بین این دو به صورت زیر در می آید.

$$E_R = R_S(\xi) E_A \quad (19)$$

معادله (۱۹) بهترین معادله برای محاسبه انرژی آزاد شده است. انرژی آزاد شده بر حسب عامل میزان آزاد شده  $G$ ، به صورت زیر نوشته می شود.

$$E_R = \int_0^\xi G dx \quad (20)$$

طرف راست معادلات (۱۹) و (۲۰) را مساوی قرار داده و از طرفین نسبت به  $\xi$  مشتق گرفته تا معادله زیر بدست آید.

$$G = R'_S(\xi) E_A \quad (21)$$

باجگذاری انرژی  $E_A$  بر حسب تنش موثر  $\sigma$  و مدول الاستیسیته  $E$  در معادله (۲۱) میزان انرژی آزاد شده به شکل مرسوم زیر در می آید.

$$G = R'_S(\xi) \sigma^2 / 2E \quad (22)$$

عامل تمرکز تنش بر حسب میزان انرژی آزاد شده به صورت زیر تعریف می شود.

$$K^2 = GE \quad (23)$$

با جاگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۳) عامل تمرکز تنش به شکل مرسوم زیر در می آید.

$$K = \sigma \sqrt{R'_S(\xi) / 2} \quad (24)$$

( معادله (۲۴) با شکل مرسوم در مکانیک شکست سنتی این تفاوت را دارد که این جا همان واحد تنش را دارد و مشابه تمرکز تنش است، در نتیجه در کار برد می تواند مفید تر و مفهوم تر باشد. در این جا گسترش عوامل مکانیک شکست تکمیل شده است. قبل از رفتن به بخش بعد برای صحت سنجی، نکاتی که می توان از گسترش بر مبنای فتح استنباط منطقی کرد آورده می شود. با توجه به این که استنباط قطعی نشده در جفت ابرو گذاشته و برای نقد آماده شده است.

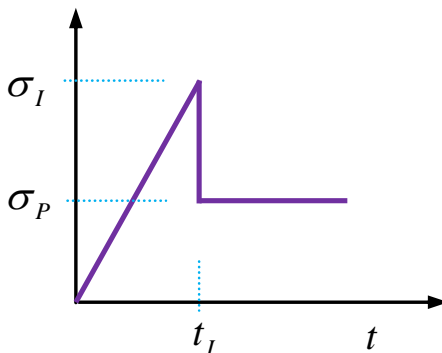
در معادله (۱۹) مقدار بیشینه انرژی آزاد شده برابر انرژی موجود است، در نتیجه مقدار بیشینه کسر حالت مربوطه برابر یک، که خود نظیر مقدار نیم برای متغیر حالت است. این به این معنی است که وقتی ترک نصف سطح مقطع را اشغال کرد همه انرژی موجود

آراده شده و ناپایداری اتفاق می افتد. در مکانیک شکست کلاسیک همه عوامل ارائه شده برای عمق ترک های بیش از نیم دقت ندارند و این به عنوان شاهد صحت برداشت فوق می باشد. برای این وضعیت عامل تمرکز تنش در معادله (۲۴) به صورت زیر در می آید.

$$K = \sigma\sqrt{\pi} \quad (25)$$

معادله (۲۵) را می توان چنین تفسیر کرد که در نوک ترک هیچ گاه تمرکز تنش از جذر عدد پی بیشتر نمی شود. که این خود به وضوح نظریه تکینگی تنش در نوک ترک را رد می کند. بر این مبنا می توان ضابطه شروع و جلو رفتن ترک را در معادله زیر بیان کرد. این ضابطه مشابه اصطکاک می باشد، به شکل ۳- مراجعه شود.

$$\begin{aligned} \sigma &\geq \sigma_T && \text{for Initiation} \\ \sigma &\geq \sigma_T / \sqrt{\pi} && \text{for Propagation} \end{aligned} \quad (26)$$



شکل ۳- ضوابط شروع و پیشروی ترک

### ۵- صحت سنجی

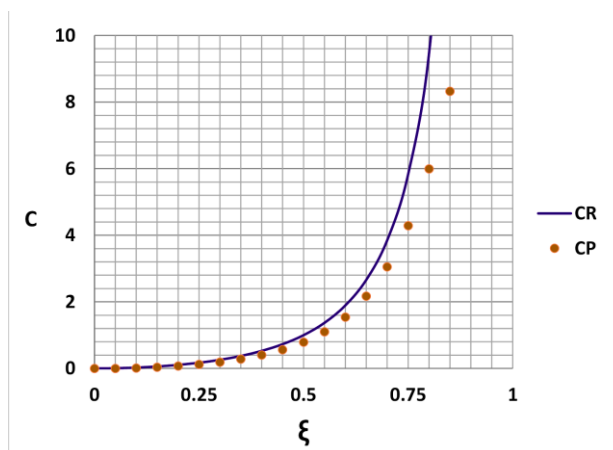
در این بخش عوامل مکانیک شکست بر مبنای فتح، با مکانیک شکست مرسوم مقایسه می شود.  
**مثال- ۱:** در این مثال نرمی ترک در یک میله ترک خورده با مقطع دایره ای تحت پیچش با معادله (۱۴) مقایسه می شود.  
**حل:** ضریب نرمی میله ترک خورده تحت پیچش توسط پادوپولوس [۹] به صورت زیر تعریف شده است.

$$CP = \left( \begin{aligned} &+ 31.985\xi^6 - 18.846\xi^5 + 4.9219\xi^4 \\ &+ 1.5285\xi^3 + 1.5785\xi^2 - 0.0301\xi^1 \end{aligned} \right) \quad (27)$$

طبق فتح نرمی میله CR به صورت زیر تعریف می گردد.

$$CR = (1 - \cos \pi\xi) / (1 + \cos \pi\xi) \quad (28)$$

ضرایب نرمی فوق در شکل ۴- باهم مقایسه شده اند. در فاصله  $\xi \in [0 \ 0.5]$  انطباق خوبی دارند که نشان از صحت فتح است. تفاوت این دو، بعد از این ناحیه به علت ناپایداری است.



شکل ۴- مقایسه نرمی میله تحت اثر پیچش

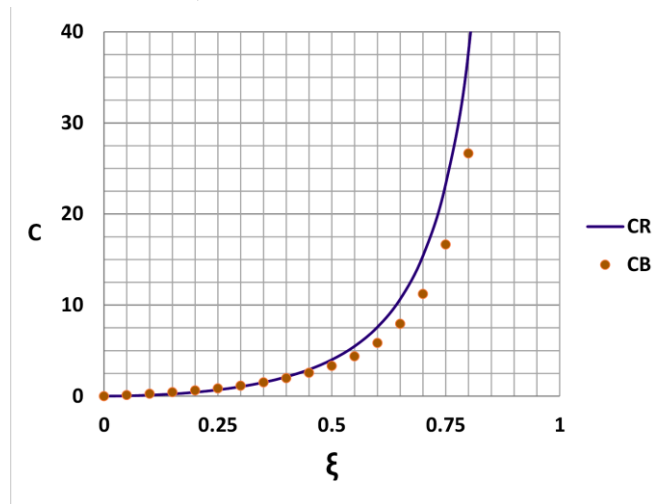
مثال-۲: بیللو [۱۹] ضریب نرمی ترک در عضو خمشی (تیر)  $CB$  را طبق معادله (۲۹) گسترش داده است.

$$CB = \xi(2 - \xi) / 0.9(1 - \xi)^2 \quad (29)$$

با استغاده از معادله (۱۶) ضریب نرمی تیر به صورت زیر تعریف می شود.

$$CR = 4(1 - \cos \pi \xi) / (1 + \cos \pi \xi) \quad (30)$$

ضرایب نرمی ترک در تیر تعریف شده در معادلات (۲۹) و (۳۰) در شکل ۵- با هم مقایسه شده اند.



شکل ۵- مقایسه نرمی ترک در تیر

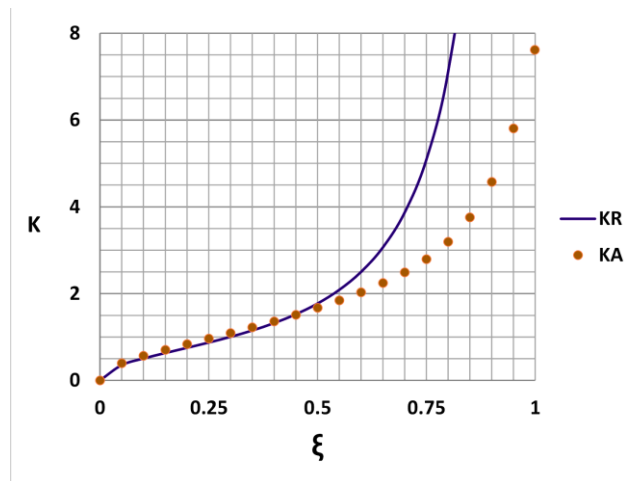
مثال-۳: علی آبادی [۲۰] عامل شدت تنش برای یک صفحه با ترک در وسط  $KA$  به صورت تیر محاسبه کرده است.

$$KA = \sqrt{\pi \xi} \begin{pmatrix} 1 + 0.043\xi + 0.491\xi^2 + 7.125\xi^3 \\ -28.403\xi^4 + 59,583\xi^5 \\ -65.278\xi^6 + 29.762\xi^7 \end{pmatrix} \quad (31)$$

عامل تمرکز تنش بر اساس فتح  $KR$  در معادله (۳۲) درج شده است.

$$KR = \sqrt{\pi \sin \pi \xi} / (1 + \cos \pi \xi) \quad (32)$$

در شکل ۶- ضرایب تمرکز تنش مندرج در معادله های (۳۱) و (۳۲) با هم مقایسه شده اند. همخوانی نتایج دلیل دیگری بر صحت فتح است.



شکل ۶- تمرکز تنش در صفحه با ترک وسط

## ۶- نتیجه گیری

از این تحقیق نتایج زیر حاصل شده است.

۱. مبانی فلسفه تغییر حالت، فتح، گسترش داده شده است. در فتح هر پدیده به صورت حرکت از مبداء به مقصد تعریف می شود. ارتباط بین این حالت ها توسط توابع پدیده بر قرار می شود. برای این کار ابتدا توابع حالت به صورت توابع صریح متغیر حالت گسترش یافته و سپس از روی آن ها توابع پدیده تکمیل شده اند.
۲. در محاسبه عوامل مکانیک شکست وضعیت سالم سازه حالت مبداء و وضعیت تخریب آن به عنوان مقصد تعیین شده است. متغیر حالت با تنظیم عمق و یا سطح ترک تعریف می شود. با استفاده از داده های موجود در فرهنگ علمی ضرایب توابع پدیده تعیین و سپس عوامل مکانیک شکست به صورت توابع مثلثاتی ساده و صریح از متغیر حالت معرفی شده است.
۳. با استفاده از چند مثال عوامل مکانیک شکست محاسبه و با نتایج دیگر موجود در فرهنگ علمی مقایسه و از همخوانی نتایج صحت و دقت فتح به تایید رسیده است.

## ۷- مراجع

1. Inglis, C.E. (1913) "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners." Trans. Roy. Inst. Naval Arch. 55, pp. 219-230.
2. Griffith, A.A. (1920) "The phenomena of rupture and flow in solids." Philos. Trans. R. Soc. Lond. A221, pp. 163-197.
3. Westergaard, H.M. (1939) "Bearing pressure and crack." J. Appl. Math. Mech. 6, pp. 49-53.
4. Irwin, G.R. (1957) "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate." J. Appl. Mech. 24, pp. 361-364.
5. Anderson, W.E., Paris, P.C., Gomez, M.P. (1961) "A rational analytic theory in fatigue." Trends Eng. 13(11), pp. 9-14.
6. Bueckner, H.F. (1970) "A novel principle for the computation of stress intensity factors." Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 50, pp. 529-546.
7. Rice, J. "Some remarks on elastic crack-tip stress field." Int. J. Solids Struct. 8, pp. 751-758.
8. Atroshchenko, E. (2010) "Stress intensity factors for elliptical and semi-elliptical cracks subjected to an arbitrary mode I loading." PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Canada.
9. Papadopoulos, C. A. (2008) "The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: a state of the art review," Mech. Sys, Signal Process. 22, pp. 763-789.
10. Arias, P., Rabczuk, T., Camanho, P.P. (2014) "Finite strain fracture of 2D problems with injected anisotropic softening element." Theor. Appl. Fract. Mech, 72(1), pp. 50-63.
11. Arias, P., Rabczuk, T. (2013) "Finite strain fracture of plates and shells with configurational forces and edge rotation." Int. J. Numer. Methods Eng. 94(12), pp. 1099-10122.
12. Ranjbaran, A. (2010) "Analysis of cracked members: the governing equations and exact solutions", Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B: Engineering, 34(B4), pp. 407-417.
13. Ranjbaran, A., Rousta, H., Ranjbaran, M., Ranjbaran, M. (2013) "Dynamic stability of cracked columns; the stiffness reduction method", Scientia Iranica A, 20(1), pp. 57-64.
14. Ranjbaran, A., (2012) "The dynamic stability analysis: application to beam-like structures," Lap Lambert Academic Publishing, Germany.
15. Ranjbaran, A., Rousta, H., (2013) "Interaction diagram for dynamic stability by Laplace Transform", Ned University Journal of Research, Structural Mechanics X (1), pp. 31-38.



16. Ranjbaran, A., Hashemi, M., Behnamianfar, F., (2015) "Dynamic stability analysis of functionally graded material beams", Ned University Journal of Research, XII(3), pp. 95-106.
17. Ranjbaran, A., Ranjbaran, M. (2014) "New finite element formulation for buckling analysis of cracked structures." J. Eng. Mech. 140 (5), pp. 04014014 (1-10).
18. Ranjbaran, A., Roustaei, H. (2013) "Finite element analysis of cracked beams: innovative weak form equation." Ned. Univ. J. Res. 11(1), pp.39-46.
19. Bilello, C. (2001) "Theoretical and experimental investigation on damaged beams under moving systems. PhD thesis, Universita degli Studi di Palermo, Palermo.
20. Aliabadi, M.H., Lopez, M.H. (1996) "Data base of stress intensity factors." Computational Mechanics Publications, Southa