



## نگرشی نو در پایداری دینامیکی سازه

عبدالرسول رنجبران<sup>۱\*</sup>، محمد رنجبران<sup>۲</sup>، فاطمه رنجبران<sup>۳</sup>

۱- استاد و محقق در مهندسی عمران، دانشگاه شیراز

۲- استاد و محقق در مهندسی عمران، دانشگاه شیراز

۳- دانشجوی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

\* ranjbarn@shirazu.ac.ir

ارسال: دی ماه ۹۷ پذیرش: دی ماه ۹۷

### چکیده

پایداری دینامیکی از مباحث مهم مهندسی است که در آن اندرکنش بین فرکانس و نیرو مورد بررسی قرار می گیرد. در این بررسی ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم تشکیل، و سپس با اعمال شرایط مرزی معادله مشخصه به دست می آید. معادله مشخصه یک معادله جبری غیر خطی است که حل آن اندرکنش بین فرکانس و نیرو را به دست می دهد. تشکیل و حل معادلات دیفرانسیل و حل معادله مشخصه غیر خطی کاری سخت و زمان بر است. با توجه به این که برای همه سازه ها فرکانس های طبیعی و نیروی های بحرانی طبیعی موجود است، در این مقاله این دو داده به صورتی دقیق، منطقی، و هنرمندانه با هم ترکیب و به صورت یک رابطه بسیار ساده نمایش داده شده است. صحت این رابطه با منطبق و مقایسه نتایج با نتایج دیگران اثبات گردیده است. اندرکنش پیشنهادی پایداری دینامیکی را هزاران بار ارزان تر می کند.

کلمات کلیدی: پایداری دینامیکی، فرکانس طبیعی، نیروی بحرانی، اندرکنش نیرو و فرکانس، معادله مشخصه.

### ۱- مقدمه

پایداری دینامیکی یکی از رشته های مهم در مهندسی عمران، مکانیک، و هوا فضا می باشد. در این رشته اندرکنش فرکانس ها و نیرو های فشاری سازه مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به اهمیت آن از اوایل نیمه دوم قرن بیستم تا کنون تحقیقات بسیار زیادی در زمینه پایداری دینامیکی انجام شده است. در این بخش تعداد محدودی از میان آن چه که در فرهنگ علمی به چاپ رسیده مرور می شود.

ریو و همکاران [۱] پایداری دینامیکی یک تیر طره ای تیموشنکو با جرم متمرکز در انتهای آن تحت اثر بار مماسی را بررسی کرده، و نشان داده اند که اگر پارامتر غیر پایستاری (مولفه نیرو در امتداد منحنی تغییر شکل) بیشتر از ۰.۵ باشد جرم متمرکز اثر شایانی روی پایداری دینامیکی دارد. پایداری دینامیکی تیری با یک ترک تحت اثر نیرو های پایستار و ناپایستار توسط ویولا و مرزانی [۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. آنها نشان دادند که وقتی شرایط مرزی ثابت بماند، با توجه به مشخصه های ترک و اینکه بار پایستار

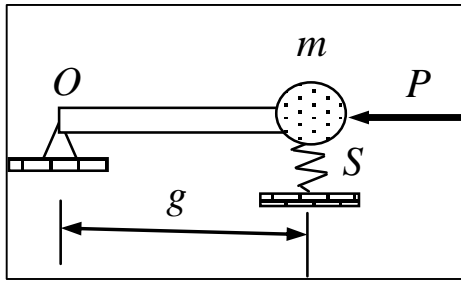
یا ناپایستار باشد، تیر ناپایدار استاتیکی و یا دینامیکی می شود. دژوندژوروف و واسیلیوف [۳] پایداری دینامیکی یک تیر تیموشنکو روی بستر الاستیک از نوع وینکلر تحت اثر بار ناپایستار را بررسی کردند. نتایج تحقیق آن ها نشان داد که برای یک تیر با لاغری متوسط پی وینکلر نیروی بحرانی کششی را کاهش می دهد. تحقیقاتی پیرامون پایداری دینامیکی تیر های ویسکو الاستیک که در امتداد محور شتاب دارند توسط چن و همکاران [۴] انجام شده است. استیماک و همکاران [۵] پایداری دینامیکی یک تیر طره تحت اثر نیروی محوری و نیروی ناپایستار (مماسی) فشاری را بررسی کرده و در آن بار های استاتیکی و هارمونیک را منظور نمودند. اثرات اندازه و محل ترک روی فرکانس های طبیعی، و همچنین نیروی بحرانی یک تیر به شکل دایره توسط کععاگاک و همکاران [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها با استفاده از روش عناصر محدود پایداری دینامیکی تیر را بررسی کردند. رنجبران [۷] اثر ترک روی پایداری ستون ها و ارتعاش آزاد تیر ها، قطعات تحت پیچش، و عضوهای تحت نیروی محوری را بررسی کرد. در آن تحقیق معادله دیفرانسیل حاکم برای عضو های ترک دار جهت تشکیل معادلات مشخصه گسترش داده شد. یک فرمولسازی نو برای بررسی پایداری دینامیکی ستون های ترک دار توسط رنجبران و همکاران [۸] انجام شد. در این کار یک معادله دیفرانسیل حاکم برای ارتعاش آزاد ستون ترک دار تحت اثر نیروی محوری فشاری گسترش یافت. معادله پیشنهادی برای حل، فقط به شرایط مرزی تیر سالم نیاز دارد و اثرات ترک به طور ضمنی در داخل معادله گنجانده شده است. آنها، هم نیروی پایستار و هم نیروی ناپایستار را مورد نظر قرار دادند. فرمول بسته حاصل با بررسی پایداری دینامیکی ستون های ترک دار با شرایط مرزی مختلف و مقایسه با نتایج کار دیگران صحت سنجی شده است. رنجبران و همکاران [۹-۱۲] پایداری دینامیکی ستون ها تحت اثر بارهای پایستار و ناپایستار را بررسی کرده و برای چند ستون با شرایط مرزی مختلف و با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله را حل کردند. آنها در یافتند که یک ستون طره ای تحت اثر نیروی ناپایستار به مراتب قوی تر از همان ستون تحت اثر نیروی پایستار عمل می کند. رنجبران و همکاران [۱۰] پایداری دینامیکی تیر های ساخته شده از مواد درجه بندی شده هدفمند را مطالعه نمودند. تمرکز آن ها بیشتر روی مدل سازی خصوصیات ماده بود. در این رابطه توابع جدیدی به نام توابع حالت تعریف شدند و از آنها در تعریف مشخصات مواد به طور موثر استفاده شد. معادلات حاکم گسترش یافت و از حل آن برای به دست آوردن رابطه اندر کنش بین فرکانس و نیروی محوری استفاده گردید.

دقت در مقالات مرور شده در فوق و در دیگر تحقیقات موجود در فرهنگ علمی نشان می دهد که بر رسی پایداری دینامیکی کاری بسیار وقت گیر، مشکل، خسته کننده، و گران است. هدف این تحقیق حل این مشکل است. در اجرای هدف و با استفاده از استدلال منطقی و تجربه های قبلی رابطه ای بسیار ساده برای اندر کنش بین فرکانس و نیروی محوری حاصل شد. طبق این رابطه مجموع نسبت نیروی بحرانی به نیروی بحرانی طبیعی، و توان دوم نسبت فرکانس به فرکانس طبیعی برابر یک است. منطق پشتوانه کار و هم چنین مقایسه نتایج با کار های دیگران نشان می دهد که رابطه پیشنهادی بر رفتار همه سازه ها حاکم است، و در آن شرط لازم و کافی برای موفقیت، وجود فرکانس های طبیعی و نیروهای بحرانی طبیعی می باشد، که تقریباً برای همه سازه ها در فرهنگ علمی موجود است. به یمن این رابطه، پایداری دینامیکی بسیار ساده شده و چندان تلاشی علاوه بر داده های موجود برای آن لازم نیست. در بخش های بعد مبانی کار به طریق منطقی و تایید کار به طریق مقایسه با کار های دیگران گسترش می یابد.

## ۲- مبانی تحقیق

هر سازه را می توان با یک سیستم یک درجه آزادی، یعنی با سختی  $S$ ، جرم  $m$ ، نیروی  $P$ ، و هندسه  $g$  مدل کرد. نمونه ای از این سیستم در شکل ۱ نشان داده شده است. منبع در فرمول سازی، علامت لنگر در جهت عقربه های ساعت مثبت فرض می شود. برای محاسبه فرکانس طبیعی  $\omega_0$ ، نیروی بحرانی در شکل ۲ صفر ( $P=0$ ) فرض شده و تعادل لنگر حول نقطه  $O$  به صورت زیر نوشته می شود.

$$(Sd - m\omega_0^2 d)g = 0 \quad (1)$$



شکل ۱- سیستم یک درجه آزادی

با توجه به این که (۱) معادله مشخصه است، لذا وقتی جواب قابل قبول دارد که کمیت داخل پرانتز صفر شود. با صفر قرار دادن مقدار داخل پرانتز فرکانس طبیعی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\omega_0^2 = S/m \quad (2)$$

برای محاسبه نیروی بحرانی طبیعی  $P_0$ ، مشابه فوق، در دیاگرام آزاد شکل ۲ جرم صفر ( $m=0$ ) فرض می شود. در این حالت تعادل لنگر حول  $O$  به صورت زیر در می آید.

$$(-P_0 + Sg)d = 0 \quad (3)$$

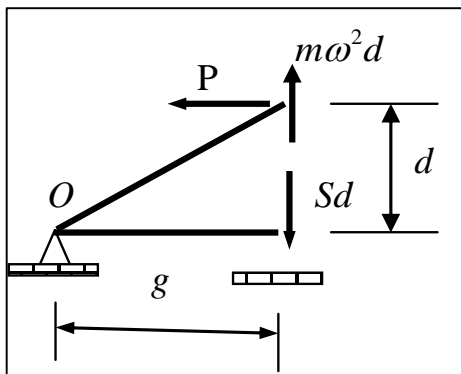
جواب منطقی معادله (۳)، با صفر قرار دادن کمیت داخل پرانتز حاصل می شود. حاصل کار محاسبه نیروی بحرانی از معادله (۴) است.

$$P_0 = Sg \quad (4)$$

با مقایسه بار وارده، با بار بحرانی طبیعی و توجه به علامت لنگر می توان دریافت که برای  $P < P_0$  لنگر مثبت و سیستم پایدار، و برای  $P > P_0$  لنگر منفی و سیستم ناپایدار، و در نتیجه برای  $P = P_0$  لنگر صفر  $P_0$  و نیروی بحرانی طبیعی است.

برای محاسبه اندر کنش نیرو و فرکانس، دیاگرام آزاد شکل ۲ را بدون فرض خاص در نظر گرفته و معادله تعادل لنگر حول نقطه  $O$  برای آن، به صورت زیر نوشته می شود.

$$(-P - m\omega^2 g + Sg)d = 0 \quad (5)$$



شکل ۲- دیاگرام آزاد سیستم یک درجه آزادی

معادله (۵) به صورت معادله مشخصه است، لذا جواب آن با صفر قرار دادن کمیت داخل پرانتز، به صورت زیر به دست می آید.

$$P + m\omega^2 g = Sg \quad (6)$$

طرفین معادله (۶) به مقدار سمت راست آن تقسیم و به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{P}{Sg} + \frac{\omega^2}{S/m} = 1 \quad (7)$$

نسبت نیروی بحرانی به نیروی بحرانی طبیعی  $R_p$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$R_p = P/P_0 \quad (8)$$

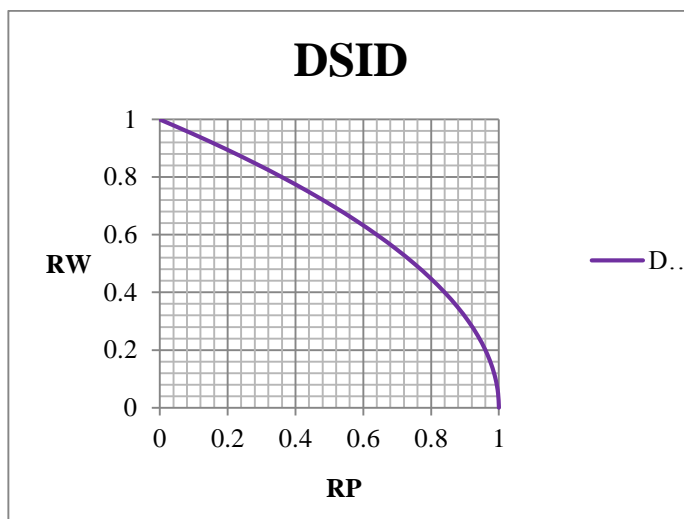
و به طریق مشابه نسبت فرکانس به فرکانس طبیعی  $R_\omega$  در معادله (۹) تعریف گردیده است.

$$R_\omega^2 = \omega^2/\omega_0^2 \quad (9)$$

با توجه به معادلات (۸) و (۹)، معادله (۷) به صورت زیر نوشته می شود.

$$R_p + R_\omega^2 = 1 \quad (10)$$

معادله (۱۰) اندرکنش بین فرکانس و نیروی بحرانی است، که در شکل ۳ نشان داده شده است. به نظر می رسد که در فرهنگ علمی برای پایداری دینامیکی رابطه ای به این سادگی موجود نباشد و این ساده ترین رابطه ممکن برای پایداری دینامیکی است. چون هر



شکل ۳- دیاگرام اندرکنش پایداری دینامیکی

سازه ای را می توان با یک سیستم یک درجه آزادی مدل کرد، لذا رابطه بالا برای همه سازه ها صادق است. چون در طول صد سال گذشته برای اکثر قریب به اتفاق سازه ها فرکانس های طبیعی و نیروهای بحرانی طبیعی محاسبه شده و موجود است، لذا می توان با استفاده از معادله (۱۰) به تنهایی پایداری دینامیکی آن ها را بدون تلاش بیشتر بررسی نمود. با توجه به این که بررسی پایداری دینامیکی به روش های مرسوم در فرهنگ علمی بسیار گران و خسته کننده است، اهمیت این معادله بیش از پیش روشن می شود. در این بخش معادله اندرکنش به طریق منطقی اثبات شد. در بخش های زیر صحت سنجی به طریق مرسوم، یعنی از طریق مقایسه با نتایج دیگران، انجام شده است.

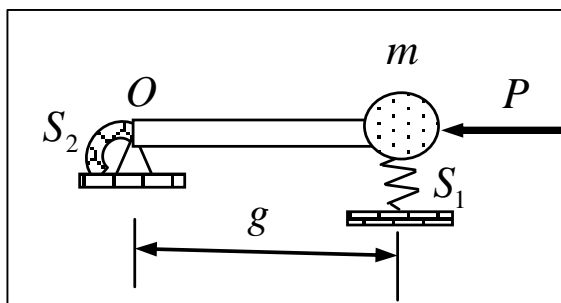
### ۳- صحت سنجی

در این قسمت چند سازه که پایداری دینامیکی آن ها قبلا توسط دیگران بررسی شده انتخاب و با مقایسه نتایج آن ها با معادله اندرکنش (۱۰)، پژوهش حاضر صحت سنجی شده است.

مثال- ۱: برای سیستم دو فزری نشان داده شده در شکل-۴، معادله اندرکنش پایداری دینامیکی را گسترش دهید.

حل: با مراجعه به کتب پایداری و دینامیک سازه ها و یا انجام محاسبات مربوطه جرم مؤثر  $m_e$ ، سختی مؤثر  $S_e$ ، فرکانس طبیعی  $\omega_0$ ، و نیروی بحرانی طبیعی  $P_0$  برای سیستم مورد نظر به صورت زیر در می آید.

$$S_e = \frac{S_1 g^2 + S_2}{g^2} \quad m_e = m \quad P_0 = \frac{S_1 g^2 + S_2}{g} \quad \omega_0^2 = \frac{S_1 g^2 + S_2}{g^2 m} \quad (11)$$



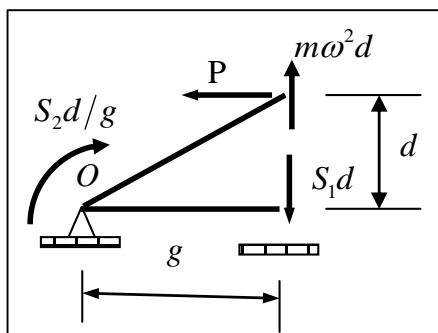
شکل ۴- سیستم دو فیزی

با توجه به دیگرام آزاد شکل ۵، معادله تعادل لنگر حول O به صورت زیر در می آید.

$$\left( S_1 g + \frac{S_2}{g} - m\omega^2 g - P \right) d = 0 \quad (12)$$

طبق معمول جواب منطقی معادله (۱۲)، با صفر قرار دادن کمیت داخل پرانتز به صورت زیر در می آید.

$$m\omega^2 g + P = S_1 g + \frac{S_2}{g} \quad (13)$$

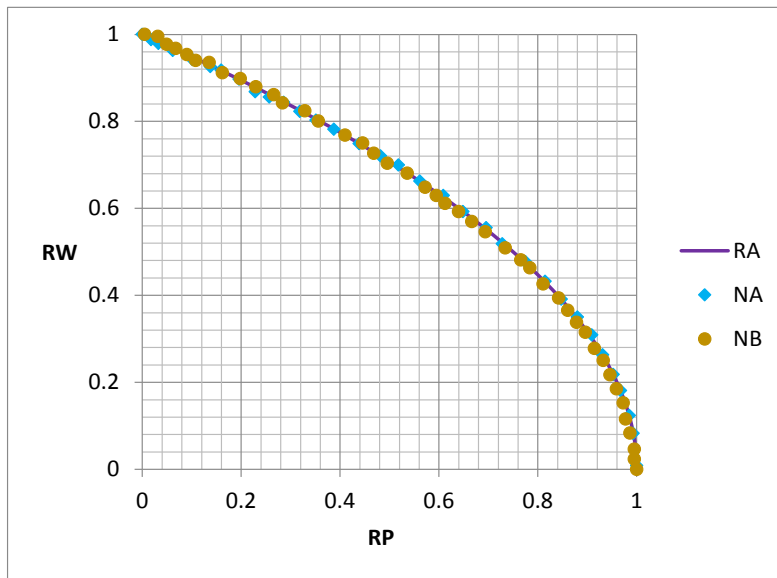


شکل ۵- دیگرام آزاد سیستم دو فیزی

با تقسیم طرفین معادله به کمیت سمت راست آن و توجه به معادله (۱۱)، معادله (۱۳) به معادله (۱۰) تبدیل می شود. این مثال نشان می دهد که معادله (۱۰) به نوع رفتار، یعنی خمشی، محوری، و غیره وابستگی نداشته و برای همه صادق است.

**مثال- ۲:** برای اولین بار تاثیر نیروی محوری و حرکت سیال در داخل لوله های نانویی مدفون، در ارتعاش و پایداری، توسط راسخ و خادم [۱۳] بررسی گردید. آنها لوله مدفون را به صورت تیر اولر- برنولی روی تکیه گاه الاستیک برای محاسبه ارتعاش در نظر گرفتند. روش های پیچیده برای محاسبه اثر توامان فرکانس و نیروی محوری فشاری، که رابطه ای غیر خطی است، به گار گرفته و نتیجه را به صورت دیگرام اندر کنش فرکانس و نیروی بحرانی نمایش دادند. در پژوهش حاضر نتایج آنها با اندر کنش پیشنهادی در معادله (۱۰) مقایسه شده است.

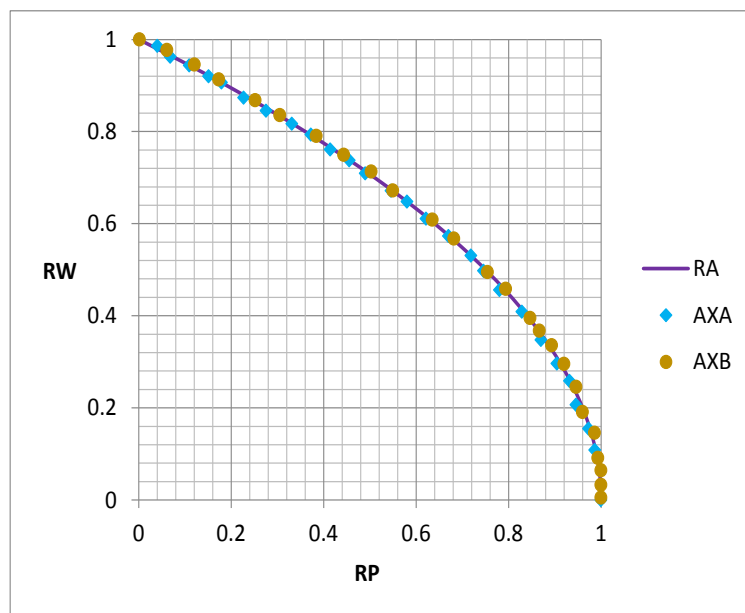
حل: دو تا از منحنی های ایشان که در شکل ۳ مقاله و در صفحه ۵ مجله آمده، اسکن و بی بعد شده و با علامت (NA NB) نشان داده می شود. نتایج ایشان در شکل ۶ با نتایج معادله (۱۰) (RA) مقایسه شده است. همخوانی بالای نتایج، صحت و دقت کار را تایید می کند.



شکل ۶- دیاگرام اندرکنش لوله نانو

مثال-۳: وانگ و چن [۱۴] پایداری دینامیکی صفحه دایره ای ساندویچی چند لایه را مورد بررسی قرار دادند. آنها آخرین روش های موجود را به کار گرفته و با استفاده از روش عناصر محدود نسبت به ساخت دیاگرام اندرکنش بار-فرکانس اقدام کردند. در پژوهش حاضر معادله (۱۰) با نتایج آنها مقایسه شده است.

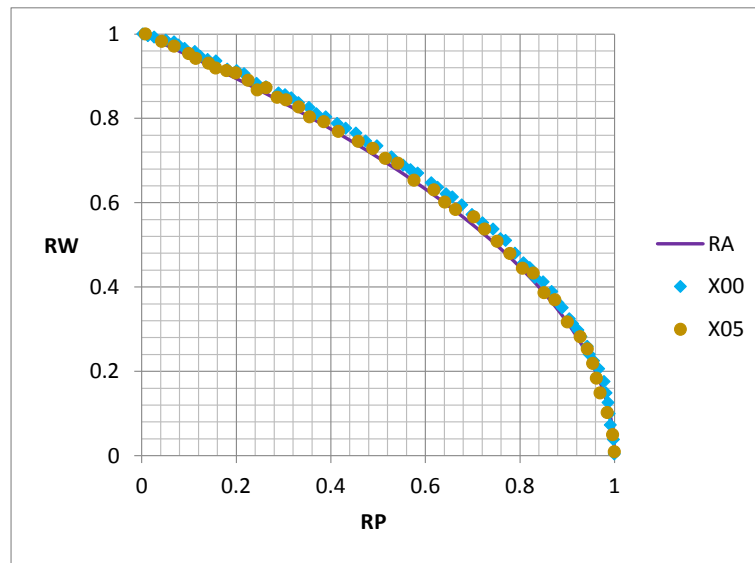
حل: منحنی های شکل ۳ که در صفحه ۱۰۴ مجله به چاپ رسیده برای مطالعه انتخاب شده است. دو منحنی در شکل مذکور (  $AXA$  و  $AXB$  ) اسکن و بی بعد شده و در شکل ۷ با نتایج معادله (۱۰) ( $RA$ ) مقایسه شده است. انطباق عالی نتایج به عنوان صحت کار منظور شده است.



شکل ۷- دیاگرام اندرکنش صفحه دایره ای

مثال-۴: رنجبران و همکاران [۹] فرمول سازی جدیدی برای مطالعه پایداری دینامیکی ستون های ترک دار ارائه کردند. یک معادله دیفرانسیل حاکم برای ستون ترک خورده ارائه شد که برای حل آن شرایط مرزی (همانند ستون سالم) کفایت می کرد و اثر ترک به طور ضمنی در معادله گنجانده شده بود. نتایج دو تا از منحنی های ایشان برای صحت سنجی معادله (۱۰) به کار گرفته شده است.

حل: دو تا از منحنی هایی که در شکل ۴ مقاله که در صفحه ۶۱ مجله به چاپ رسیده برای صحت سنجی انتخاب شده است. منحنی ها ( $X00$  و  $X05$ ) اسکن و بی بعد شده و در شکل ۸ با نتایج معادله (۱۰) ( $RA$ ) مقایسه شده است. باز هم چون قبل معادله (۱۰) با دقت فوق العاده بر نتایج منطبق شده و کار را بیشتر تایید کرده است.



شکل ۸- دیاگرام اندرکنش ستون ترک دار

#### ۴- نتیجه گیری

از این پژوهش نتایج زیر استخراج شده است.

۱. در مطالعه پایداری دینامیکی، همه سازه ها را می توان با یک سیستم یک درجه آزادی با جرم، سختی، و نیروی معادل مدل کرد.
۲. با استفاده از سیستم یک درجه آزادی رابطه فوق العاده ساده ای برای اندرکنش بین فرکانس و نیروی بحرانی گسترش یافت، و نشان داده شد که نسبت نیروی بحرانی به نیروی بحرانی طبیعی به علاوه توان دوم نسبت فرکانس به فرکانس طبیعی برابر یک است.
۳. دیاگرام اندرکنش پیشنهادی با نتایج دیگران در مورد لوله های نانویی روی بستر الاستیک و حرکت سیال در درون آن، صفحات دایره ای ساندویچی چند لایه، ستون های ترک خورده، و سیستم چند فتره مقایسه و مورد تایید قرار گرفت.
۴. در سایه رابطه پیشنهادی منبع بررسی پایداری سازه ها تنها با استفاده از فرکانس ها و نیروی بحرانی طبیعی آنها (که تقریباً همه موجودند و یا به سادگی قابل محاسبه اند) انجام می شود و نیازی به کار جداگانه تحت عنوان پایداری دینامیکی نیست.
۵. انیشتاین گفته بود که کار های علمی باید به ساده ترین شکل ممکن باشد. رابطه پیشنهادی ساده ترین رابطه است و روح او را شاد می کند.

#### ۵- مراجع

1. Ryu, B.J., Katayama, K. and Sugiyama, Y. (1998) "Dynamic stability of Timoshenko columns subjected to sub-tangential forces", Computers & Structures, 68, pp. 499-512 .
2. Viola, E. and Marzani, A. (2004) "Crack effect on dynamic stability of beams under conservative and non-conservative forces", Engineering Fracture Mechanics, 71, pp. 699-718 .
3. Viola, E., Ricci, P. and Aliabadi, M.H. (2007) "Free vibration of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method", Journal of Sound and Vibration, 304, pp. 124-153 .

4. Djondjorov, P.A. and Vassilev, V.M. (2008) "On the dynamic stability of a cantilever under tangential follower force according to Timoshenko beam theory", *Journal of Sound and Vibration*, 311, pp. 1431–1437 .
5. Chen, L.Q., Tang, Y.Q. and Lim, C.W. (2010) "Dynamic stability in parametric resonance of axially acceleration viscoelastic Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp. 547–565.
6. Stimac, G., Turkalj, G. and Zigulic, R. (2008) "Dynamic analysis of a cantilever column subjected to compressive force", *Engineering Review*, 28(1), pp. 1–10 .
7. Karaagac, C., Ozturk, H. and Sabuncu, M. (2011) "Crack effects on the in-plane static and dynamic stabilities of a curved beam with an edge crack", *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp. 1718–1736 .
8. Ranjbaran, A. (2010) "Analysis of cracked members: the governing equations and exact solutions", *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B: Engineering*, 34(B4), pp. 407–417 .
9. Ranjbaran, A., Rousta, H., Ranjbaran, M., Ranjbaran, M. (2013) "Dynamic stability of cracked columns; the stiffness reduction method", *Scientia Iranica A*, 20(1), pp. 57–64 .
10. Ranjbaran, A., (2012) "The dynamic stability analysis: application to beam-like structures," Lap Lambert Academic Publishing, Germany .
11. Ranjbaran, A., Rousta, H., (2013) "Interaction diagram for dynamic stability by Laplace Transform", *Ned University Journal of Research, Structural Mechanics X* (1), pp. 31-38 .
12. Ranjbaran, A., Hashemi, M., Behnamianfar, F., (2015) "Dynamic stability analysis of functionally graded material beams", *Ned University Journal of Research*, XII(3), pp. 95-106 .
13. Rasekh, M. and Khadem, S. E., (2009) "Nonlinear vibration and stability analysis of axially loaded embedded carbon nanotubes conveying fluid", *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42; 135112 (8pp). (
14. Wang, H. J., and Chen, L. W., (2003) "Axisymmetric dynamic stability of sandwich circular plates", *Composite Structures*, 59: 99-107.